

Interferometro di Michelson

biancalana andrea

settembre 2002

Indice

1	Struttura dell'interferometro di Michelson	2
1.1	Lo specchio mobile	2
1.2	Il beam splitter	3
2	Funzionamento dell'interferometro	4
2.1	Localizzazione delle frange	4
2.1.1	Sorgente estesa	5
2.1.2	Sorgente puntiforme	5
2.2	Coerenza temporale della sorgente	6
3	Applicazioni	6
3.1	Misura della lunghezza d'onda di un laser	7
3.2	Misura della separazione del doppietto del sodio	7
3.3	Analisi di elementi ottici	7
3.4	Misura di indice di rifrazione	8
3.5	Spettroscopia e trasformata di Fourier	8
3.5.1	Algoritmo <i>Fast Fourier Transform</i> (FFT)	9
4	Doppler sullo specchio mobile	10

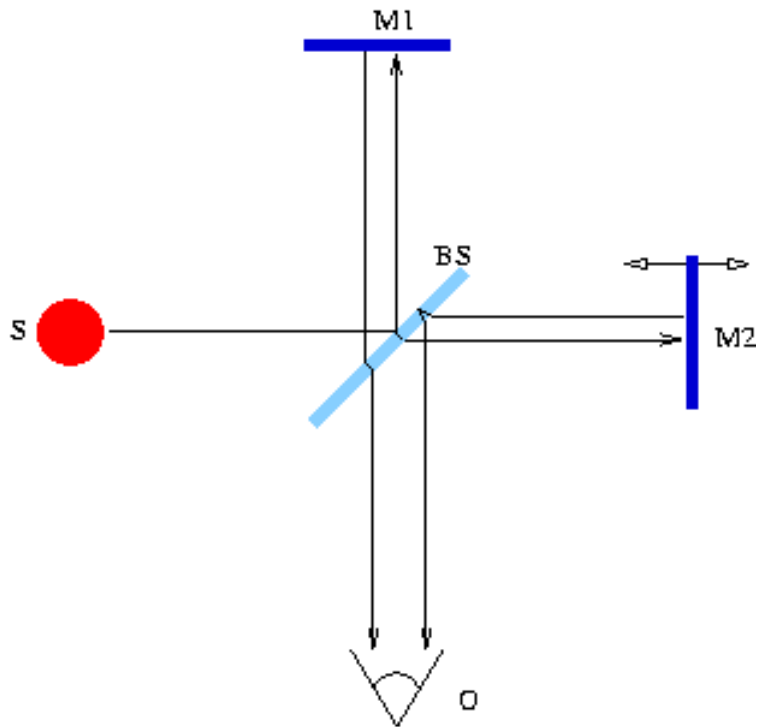


Figura 1: Struttura dell'interferometro.

1 Struttura dell'interferometro di Michelson

In figura 1 è rappresentato l'interferometro di Michelson nella sua forma più semplice.

La luce emessa dalla sorgente S viene divisa, dalla superficie semi-riflettente di un vetro piano-parallelo BS (*beam splitter*), in due fasci reciprocamente perpendicolari.

I due fasci separati dal BS vengono riflessi dagli specchi piani M_1 e M_2 e ritornano verso il BS dove vengono ricombinati¹ nella direzione dell'osservatore O . Nel seguito (vd. 2.1) vedremo dove e come l'osservatore O può osservare le figure di interferenza. La sovrapposizione dei due fasci dà luogo a interferenza perché essi sono coerenti (vd. 2.2).

1.1 Lo specchio mobile

Lo specchio M_1 è fisso mentre lo specchio M_2 è montato su un "carrello" e può essere spostato nella direzione del BS per mezzo di una vite micrometrica.

Spostando lo specchio M_2 di un tratto δx si ottiene una variazione del percorso della luce nel corrispondente braccio di $2\delta x$: nella figura di interferenza osservata da

¹le frecce in figura rappresentano solo le direzioni dei fasci e sono tracciate volutamente separate per visualizzare le rifrazioni e riflessioni nel *beam splitter*.

O si avrà uno spostamento delle frange tale scambiare le frange scure con quelle chiare qualora si verifichi la condizione $2\delta x = (2k + 1)\lambda/2$ essendo k un qualunque intero.

Utilizzando sorgenti altamente coerenti (vd. 2.2), cioè laser, le frange di interferenza saranno visibili anche per notevoli spostamenti di M_2 : si possono facilmente avere differenze di percorso di, per esempio, $10^6\lambda$ in modo che si osservano le frange del milionesimo ordine.

Volendo misurare l'alternarsi delle frange all'uscita dell'interferometro sarà necessario attuare il movimento dello specchio con precisione migliore di $\lambda/4$ da cui la necessità di usare una vite micrometrica e una meccanica molto fine: si tenga conto che le lavorazioni meccaniche, per esempio al tornio, forniscono tolleranze dell'ordine di $1/100$ mm mentre per luce visibile si ha $\lambda/4 \approx 1/10000$ mm.

Questa notevole precisione è anche la causa della grande sensibilità dell'interferometro alle vibrazioni e a tutte le altre variazioni della lunghezza dei bracci (ovvero della posizione degli specchi). Usualmente si ricorre a supporti antivibranti per il montaggio degli interferometri; nel caso degli storici esperimenti di Michelson-Morley, fu impiegato un massiccio supporto di pietra galleggiante in una vasca di mercurio affinché si potesse ruotare l'interferometro durante l'osservazione delle frange².

1.2 Il beam splitter

Il divisore di fascio BS serve a separare l'ampiezza dell'onda luminosa nei due bracci dell'interferometro; viene generalmente rappresentato come uno specchietto "poco argentato" tale da riflettere il 50% della luce: in realtà è inessenziale che la riflettività del BS sia esattamente al 50% perché esso agisce comunque una volta in trasmissione e una volta in riflessione per entrambi i fasci che risultano quindi comunque bilanciati in intensità: resta il fatto che con riflettività al 50% si ha la massima intensità di ogni fascio nell'uscita dell'interferometro verso l'osservatore O ³ perché il prodotto di due coefficienti (di trasmissione e di riflessione) di cui è fissata la somma (100%) è massimo quando essi sono uguali.

La luce che viene riflessa dallo specchio M_2 attraversa lo spessore del vetro del BS tre volte nell'intero percorso mentre la luce che viene riflessa da M_1 lo attraversa una sola volta. Per rimuovere questa asimmetria⁴ si usa inserire una lamina di compensazione dello stesso materiale e spessore e allo stesso angolo di incidenza del BS (ma senza il rivestimento semi-riflettente). La compensazione è sempre necessaria quando si vogliono osservare le frange in luce bianca.

In alternativa si può usare un prisma cubico come divisore di fascio (in cui la riflessione avviene sulla superficie interna diagonale) o una pellicola otticamente sottilissima (dielettrica o metallizzata).

²in questo caso la lunghezza dei bracci e la sensibilità dello strumento erano moltiplicati di circa 10 volte tramite riflessioni multiple.

³i fasci che invece escono verso la sorgente sono molto sbilanciati in intensità se la riflettività del beam splitter differisce dal 50%.

⁴bisogna ricordare che il vetro di cui è composto il BS agisce come una "lente" su fronti d'onda non piani (per esempio sferici) anche se è piano parallelo; nel caso in cui si usi luce non monocromatica si deve inoltre considerare che il vetro del BS è un mezzo dispersivo.

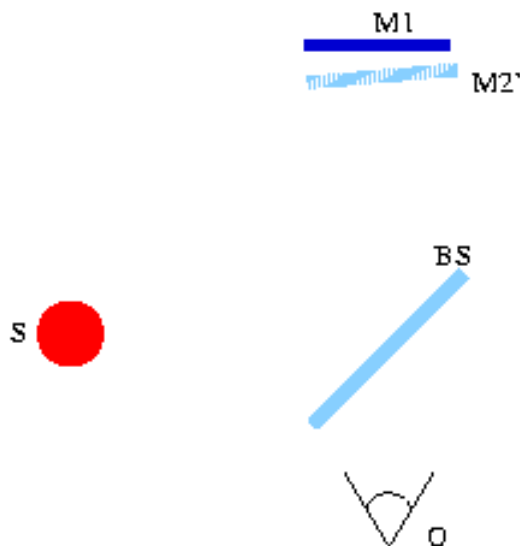


Figura 2: Specchio M_1 e immagine dello specchio M_2 .

2 Funzionamento dell'interferometro

Sia M_2' l'immagine di M_2 data dal *beam splitter* BS (vd. fig.5); il cammino ottico⁵ della luce che si propaga dalla sorgente S all'osservatore O trasmessa dal BS e riflessa da M_2 è uguale a quello della luce riflessa dal BS e “virtualmente” riflessa sulla superficie di M_2' (che, per l'appunto, è virtuale).

La figura di interferenza osservata da O può quindi essere considerata prodotta da un cuneo o da una “pellicola” di aria limitata dalla superficie riflettente (reale) di M_1 e dalla superficie riflettente (virtuale) di M_2' (assumendo che in M_2 si abbia un cambiamento di fase Φ pari alla differenza tra gli sfasamenti dovuti alla riflessione interna ed esterna al *beam splitter*).

2.1 Localizzazione delle frange

Nei fenomeni di interferenza, in generale, gioca un ruolo importante la geometria della sorgente utilizzata che può essere estesa o puntiforme.

Se la sorgente è puntiforme si osserva una figura di interferenza netta in qualunque zona dello spazio in cui si sovrappongono le radiazioni: si dice che le frange di interferenza sono “non localizzate”.

Succede spesso, però, che la sorgente sia decisamente non puntiforme: capita, per esempio, quando si osservano colori iridescenti di natura interferenziale su “lamine sottili” (bolle di sapone, macchie d'olio sull'acqua ecc.) illuminate dalla luce del cielo;

⁵il cammino ottico è il prodotto tra l'indice di rifrazione n e la lunghezza del percorso della luce, o meglio è l'integrale di linea $\int n \cdot dl$ essendo in generale n una funzione della posizione.

in questi casi la *visibilità*⁶ (o *contrasto*) della figura di interferenza è apprezzabilmente diversa da zero in una regione dello spazio molto limitata in prossimità della superficie della “lamina”. Tali figure di interferenza si dicono “localizzate”.

L’impostazione rigorosa del problema della localizzazione delle frange di interferenza date da lamine e cunei è dovuta a Michelson.

2.1.1 Sorgente estesa

Se la sorgente utilizzata nell’interferometro di Michelson è estesa (per esempio una lampada spettrale) le frange saranno in generale localizzate; se M_1 e M'_2 sono paralleli le frange date da una sorgente quasi-monocromatica sono circolari e localizzate all’infinito (cioè possono essere osservate da O con l’occhio accomodato all’infinito o tramite un telescopio o su uno schermo posto sul piano focale di una lente). Se lo specchio mobile viene traslato in modo che M'_2 si avvicini a M_1 le frange si contraggono verso il centro e diventano più grandi; quando M'_2 e M_1 coincidono (si dice che vanno in “contatto ottico”) si osserva una illuminazione uniforme a un livello che dipende dal valore dello sfasamento Φ descritto [sopra](#).

Quando M_1 e M'_2 sono vicini tra loro ma mutuamente leggermente inclinati a formare un cuneo molto acuto si osservano frange localizzate praticamente rettilinee, parallele allo spigolo del cuneo e equidistanziate⁷.

2.1.2 Sorgente puntiforme

La sorgente puntiforme può essere realizzata ponendo una lente di fronte al laser: il fronte d’onda sferico che si ottiene sarà angolarmente tanto più ampio quanto più corta sarà la focale della lente.

Nel caso in cui la sorgente sia puntiforme, la formazione delle frange nell’interferometro di Michelson può essere vantaggiosamente interpretata considerando la sovrapposizione della luce emessa da due sorgenti virtuali S_1 e S_2 che sono immagini della sorgente S date dallo specchio M_1 e dallo specchio M'_2 insieme al BS : le due immagini virtuali di S sono localizzate oltre i due specchi M_1 e M'_2 a distanze pari alle lunghezze dei bracci sommate alla distanza tra la S e il BS : in questo modo è facile riconoscere che le frange di interferenza che si ottengono con M_1 e M'_2 quasi coincidenti ma leggermente inclinati sono analoghe a quelle che si ottengono con la doppia fenditura di Young (o con il biprisma di Fresnel).

In generale, le superfici su cui è costante la differenza di fase delle radiazioni emesse dalle sorgenti virtuali puntiformi S_1 e S_2 sono iperboloidi di rotazione a due falde (con le sorgenti nei fuochi: per tutti i punti di ognuna di queste superfici si ha la stessa differenza delle distanze dalle sorgenti): le figure di interferenza che si raccolgono su uno schermo sono le sezioni degli iperboloidi sullo schermo stesso e, come è noto, poiché le superfici iperboloidi sono rappresentate da quadriche le loro sezioni piane sono curve coniche. D’altra parte, poiché la sorgente è puntiforme le frange sono non

⁶definita come: $(I_{max} - I_{min}) / (I_{max} + I_{min})$

⁷questa configurazione delle frange viene spesso rappresentata nei libri di testo dopo avere erroneamente indotto il lettore a credere che gli specchi M_1 e M_2 siano rigorosamente perpendicolari e, quindi, M_1 e M'_2 rigorosamente paralleli...

localizzate e quindi possono essere visualizzate ponendo in qualunque zona all'uscita dell'interferometro uno schermo (o una pellicola fotografica o un CCD).

2.2 Coerenza temporale della sorgente

I due fasci che percorrono i bracci dell'interferometro di Michelson sono tra loro "coerenti" perché prodotti dalla stessa sorgente: le frange saranno visibili purché la differenza di percorso della luce nei due bracci sia più piccola della *lunghezza di coerenza* della luce utilizzata.

La lunghezza di coerenza è pari a c volte il *tempo di coerenza* $\Delta\tau$ (essendo c la velocità della luce).

Il tempo di coerenza rappresenta la durata media delle oscillazioni perfettamente sinusoidali dell'onda elettromagnetica ed è semplicemente legato alla *monocromaticità* della radiazione dalla relazione di indeterminazione:

$$\Delta\tau \cdot \Delta\nu \approx 1 \quad \Delta\tau \approx \frac{1}{\Delta\nu}$$

che è una conseguenza del teorema di Fourier.

La lunghezza di coerenza può essere misurata con l'interferometro di Michelson misurando lo spostamento dello specchio mobile che porta dalla comparsa alla scomparsa di una figura di interferenza: portando lo specchio oltre queste posizioni limite si osserva una illuminazione uniforme all'uscita dall'interferometro.

Michelson riuscì a osservare le frange di interferenza con la riga rossa a 643.8 nm del Cadmio per differenze di percorso di oltre 500000 lunghezze d'onda (circa 30 cm).

Le sorgenti laser hanno un grado di monocromaticità molto elevato: le lunghezze di coerenza di laser monomodo possono raggiungere le centinaia di metri o addirittura i chilometri. Questo fatto, unito alla elevata coerenza spaziale, rende particolarmente semplice visualizzare frange di interferenza con i laser.

3 Applicazioni

L'interferometro di Michelson è famoso per l'uso che ne ha fatto lo stesso Michelson in tre esperimenti storici a partire dal 1880:

- (1887) l'esperimento di Michelson-Morley sul vento d'etere;
- (1891) il primo studio sistematico della struttura fine delle righe spettrali e della loro forma;
- (1895) il primo confronto diretto tra la lunghezza d'onda delle righe spettrali e la lunghezza del metro campione.

Nel seguito sono descritte alcune applicazioni⁸ in parte legate a questi esperimenti storici.

⁸ma le applicazioni delle tecniche interferometriche (con interferometri di Michelson, di Mach-Zehnder, di Fabry-Perot ecc.) sono mooolto più numerose.

3.1 Misura della lunghezza d'onda di un laser

Utilizzando una sorgente laser è piuttosto facile visualizzare le frange di interferenza, per esempio di forma circolare. Variando la posizione dello specchio mobile si può contare il numero di frange (chiare o scure) che attraversano un punto prestabilito della figura di interferenza.

Il numero N di frange, lo spostamento δx e la lunghezza d'onda λ del laser sono semplicemente legati dalla relazione:

$$2\delta x = N\lambda$$

avendo assunto che il movimento dello specchio avvenga in un mezzo di indice di rifrazione praticamente identico a 1.

3.2 Misura della separazione del doppietto del sodio

Un'altra tipica applicazione di importanza storica e didattica consiste nella separazione delle righe che compongono il doppietto del sodio centrato alla lunghezza d'onda $\lambda = 589.3 \text{ nm}$.

Spostando lo specchio mobile si osserva uno "scorrimento" delle frange, come già descritto, ma se la luce è composta di due righe spettrali il *contrasto* (o *visibilità*) delle frange varia lentamente⁹ con la posizione dello specchio e si passa alternativamente dalla condizione in cui le frange sono molto nette alla condizione in cui le frange scompaiono (scompaiono del tutto solo se le due righe hanno la stessa intensità, come succede in caso di sorgente "spessa"). La massima visibilità si ha quando si sovrappongono le frange luminose della prima riga del doppietto con quelle della seconda riga; si ha la minima luminosità quando le frange luminose di una riga si sovrappongono a quelle oscure dell'altra.

Si dimostra che, indicando con δx lo spostamento dello specchio e con n il numero di alternanze della visibilità delle frange, la separazione in lunghezza d'onda è:

$$\lambda - \lambda' = n \frac{\lambda\lambda'}{4\delta x} \approx n \frac{\lambda^2}{4\delta x}$$

essendo λ la lunghezza d'onda media del doppietto.

3.3 Analisi di elementi ottici

Versioni leggermente modificate dell'interferometro di Michelson sono impiegate per i test di elementi ottici (interferometro di Twyman-Green): in questo caso la luce di una sorgente puntiforme viene collimata da una lente convergente e inviata all'ingresso dell'interferometro che viene quindi percorso da onde piane; in uno dei bracci viene posto, per esempio, un obiettivo fotografico da analizzare e il corrispondente specchio viene sostituito con uno specchio sferico; viene aggiustata la posizione dell'obiettivo in modo che il suo fuoco coincida con il centro di curvatura dello specchio: la forma delle frange di interferenza con questa configurazione dipende dal (ovvero: permette di

⁹lentamente rispetto alla rapidità con cui si alternano le frange

risalire al) tipo di aberrazioni ottiche presenti nell'obiettivo da testare (e eventualmente da correggere).

3.4 Misura di indice di rifrazione

Lo spostamento delle frange si osserva quando varia il cammino ottico della luce che percorre un braccio rispetto a quello della luce che percorre l'altro: poiché il cammino ottico è il prodotto della lunghezza del percorso con l'indice di rifrazione si può facilmente utilizzare l'interferometro di Michelson per misurare piccole variazioni dell'indice di rifrazione di una sostanza trasparente (liquida o gassosa) contenuta in un opportuno recipiente con pareti otticamente lavorate.

E' possibile misurare l'indice di rifrazione dell'aria che, come è noto, è molto vicino all'unità. Nel recipiente attraversato dalla luce di uno dei bracci può essere praticato il vuoto e, infine, viene fatta entrare lentamente l'aria osservando lo scorrimento delle frange. La variazione complessiva del cammino ottico sarà $2(n - 1)d$ dove n è l'indice di rifrazione dell'aria e d lo spessore d'aria nel recipiente.

Se in uscita dall'interferometro si vedono scorrere N frange vale la relazione:

$$2(n - 1)d = N\lambda$$

che permette di ricavare n se è nota la lunghezza d'onda λ della luce impiegata.

3.5 Spettroscopia e trasformata di Fourier

All'uscita dell'interferometro può essere posto un fotorivelatore (un fotodiodo al silicio o, nel caso di luce molto debole, un fotomoltiplicatore) in un punto fissato della figura di interferenza.

Il segnale in corrente di un fotodiodo è proporzionale all'intensità della luce che lo colpisce (per un ampio intervallo di intensità) e quindi, in questo modo, è possibile misurare e registrare l'intensità della luce al variare della posizione dello specchio mobile.

Nel caso in cui la sorgente sia coerente (vd. 3.1), cioè un laser, l'intensità sul fotodiodo varia con legge sinusoidale al variare della posizione x dello specchio. Eseguendo la trasformata di Fourier del segnale sinusoidale si ottiene, banalmente, una distribuzione in frequenza con un solo picco. Poiché vale il principio di sovrapposizione si ha che in generale:

il modulo quadro della funzione complessa "trasformata di Fourier del segnale del fotodiodo" dà la distribuzione spettrale della radiazione.

I passi della scansione devono essere tanto più piccoli quanto più è piccola la lunghezza d'onda della luce; l'ampiezza della scansione deve essere tanto più ampia quanto più fine deve essere la risoluzione della distribuzione spettrale.

Questa tecnica spettroscopica è ampiamente utilizzata nella regione infrarossa¹⁰ ma può essere utilizzata anche nella regione della luce visibile. Lo spostamento dello

¹⁰credo solo per la maggiore tolleranza meccanica dei movimenti legata alla maggiore lunghezza d'onda della radiazione.

specchio mobile può essere realizzato tramite un motore passo-passo controllato da computer (o tramite attuatori piezoelettrici o altri dispositivi a controllo elettronico) e il segnale del fotodiode, opportunamente amplificato, viene campionato ad ogni passo dello spostamento dello specchio.

Lo spettro può, infine, essere ottenuto in tempi brevi utilizzando [algoritmi veloci](#) (eventualmente implementati sullo stesso hardware di acquisizione) per il calcolo della trasformata di Fourier discreta.

3.5.1 Algoritmo *Fast Fourier Transform* (FFT)

La trasformata di Fourier è uno strumento matematico particolarmente flessibile largamente utilizzato nella elaborazione dei segnali in numerosi campi (acustica, spettroscopia, comunicazioni satellitari, trattamento di immagini, ...).

Dal 1965 (Cooley e Tukey) sono state superate difficoltà computazionali permettendo il calcolo veloce della trasformata di Fourier tramite un algoritmo generalmente noto come FFT: questo ha dato grande impulso alle tecniche interferometriche per la spettroscopia in trasformata di Fourier.

Il processo digitale di calcolo della trasformata di Fourier si può essenzialmente ridurre alla moltiplicazione di un vettore di N elementi per una matrice $N \times N$ i cui elementi sono radici complesse dell'unità: l'elemento di riga h e colonna k è:

$$e^{2\pi i h k / N}$$

essendo i l'unità immaginaria. Evidentemente ogni elemento della matrice è diverso da zero e questo comporta che, nonostante la semplicità concettuale del calcolo, si devono svolgere N^2 moltiplicazioni.

Nel caso di una misura con l'interferometro di Michelson, se si vuole fare una scansione dello specchio mobile di 1 mm con passi dell'ordine di $\lambda/10$, è necessaria l'acquisizione di $N \approx 5000$ valori se si assume $\lambda \approx 0.5\ \mu\text{m}$ per la luce visibile. Il calcolo della trasformata richiederebbe 25 milioni di moltiplicazioni.

In questo calcolo, tuttavia, molte moltiplicazioni vengono ripetute più volte: sfruttando particolari proprietà algebriche della matrice di Fourier e organizzando il calcolo in modo efficiente possono essere eliminate quasi tutte le ridondanze nelle operazioni riducendo il numero complessivo di moltiplicazioni da N^2 a $N \log_2 N$. Nel caso del vettore di 5000 elementi si ha una riduzione del numero di moltiplicazioni di un fattore 400. Il vantaggio dell'applicazione della FFT cresce rapidamente al crescere di N .

La pubblicazione del lavoro di Cooley e Tukey del 1965 fu affrettata e dettata (vd. B.A. Cipra SIAM News vol. 26-3, Maggio 1993) principalmente dal fatto che l'algoritmo si prestava ad essere sottoposto a brevetto: Cooley lavorava presso la IBM la cui politica era volta ad evitare che software e algoritmi venissero "imbottigliati" da brevetti; la conseguente decisione fu di rendere l'algoritmo di "pubblico dominio" con la pubblicazione dell'articolo.

4 Effetto Doppler sullo specchio mobile

Lo spostamento delle frange dovuto allo spostamento dello specchio mobile può essere visto come conseguenza dell'effetto Doppler.

Consideriamo, per esempio, la misura della lunghezza d'onda di un laser descritta in 3.1. Se lo specchio mobile viene spostato a velocità costante v il numero di frange che passa in un punto prestabilito della figura di interferenza in un tempo δt è $2v\delta t/\lambda$. La "frequenza di scorrimento delle frange" è pari al numero di frange che passano nell'unità di tempo:

$$\nu_{batt} = 2v/\lambda = 2\nu v/c$$

essendo $\nu = c/\lambda$ la frequenza della luce.

Considerando l'effetto Doppler sulla luce riflessa dallo specchio mobile si ottiene la frequenza spostata:

$$\nu' = \nu \left(1 \pm \frac{2v}{c} \right) = \nu \pm \nu \frac{2v}{c}$$

Sovrapponendo la radiazione a frequenza ν con quella a frequenza ν' si ha il fenomeno dei "battimenti" che capitano proprio alla frequenza

$$\nu_{batt} = |\nu - \nu'| = \nu \frac{2v}{c}$$

già ottenuta sopra.

Si può pensare di sostituire lo specchio mobile con un sistema diffusore del quale è così possibile misurare la componente longitudinale v della velocità; se il sistema diffusore è composto di numerose particelle (per esempio microrganismi o una sospensione di microparticelle ecc.) è possibile calcolare la distribuzione statistica della componente longitudinale delle velocità nel campione¹¹.

¹¹con opportuni accorgimenti si può determinare anche il segno della componente longitudinale della velocità.